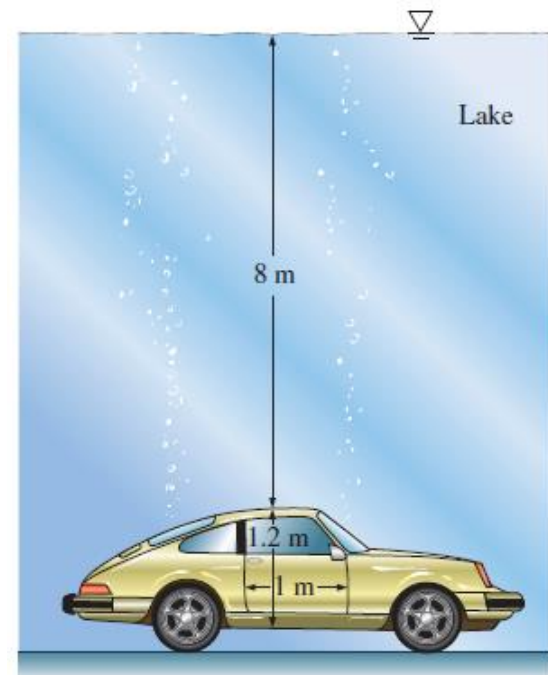


유체역학 (08 차)

2장. 유체 정역학

평면에 작용하는 정수력학적 힘



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

정수력학 (Hydrostatics): 유체 정역학 (fluid statics) 중 유체가 액체인 경우

- 인접한 면 사이에 상대적 운동이 없다
- 전단응력은 없고 수직력만 다룬다(압력)
- 압력의 변화는 액체의 무게와 기인한다 ($P = \gamma h = \rho g h$)

✓ 댐의 수문, 액체 저장 탱크, 정지 선박의 선체 같은 평면들은 유체에 의해 받는 압력의 크기가 분포져 있다

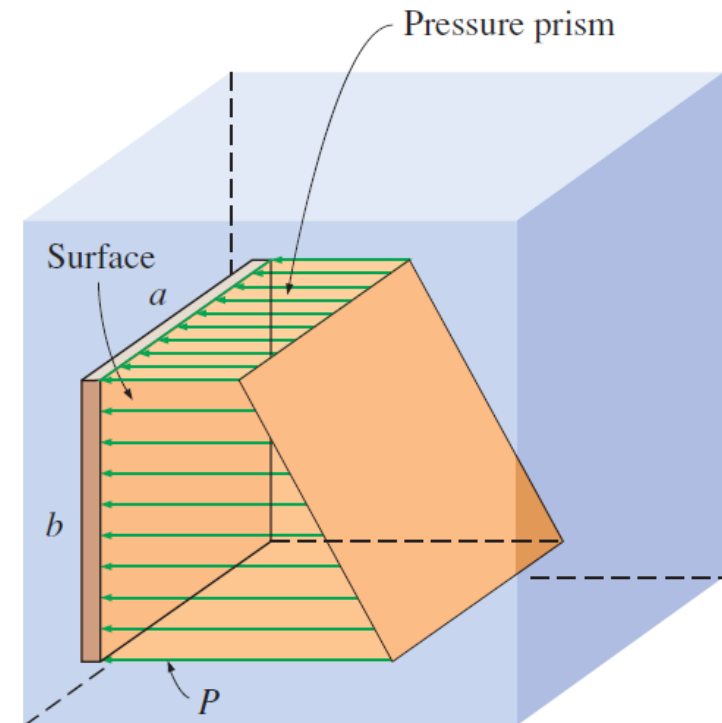
◆ 전압력

평면에 작용하는 총 힘 (벡터).

$$(P = F/A)$$

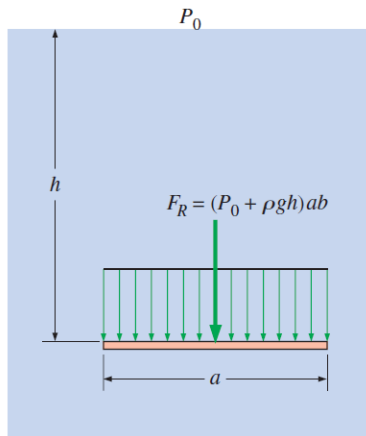
압력이 일정하지 않을 때, 전압력은??

전압력의 크기는? 방향은? 작용점은?

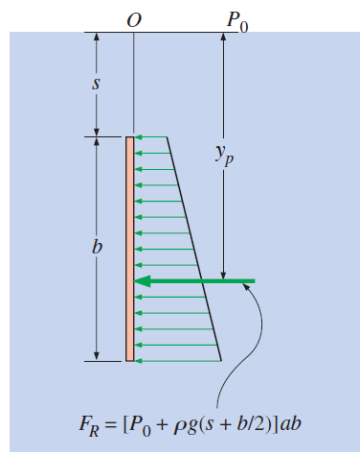


2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

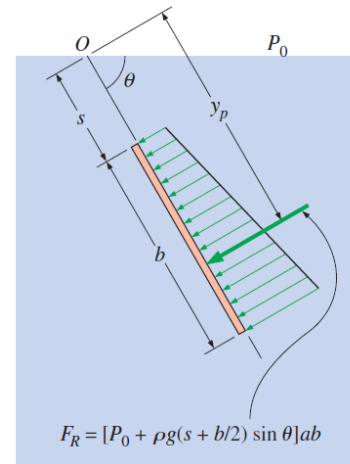
전압력의 ① 크기 ② 방향 ③ 작용점 (center of pressure)



수평한 평면에 작용하는 전압력

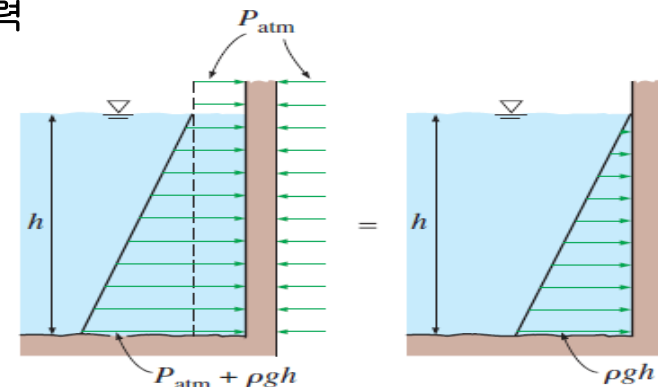


수직한 평면에 작용하는 전압력



경사진 평면에 작용하는 전압력

(간단한 계산을 위하여 대기압 무시) →



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

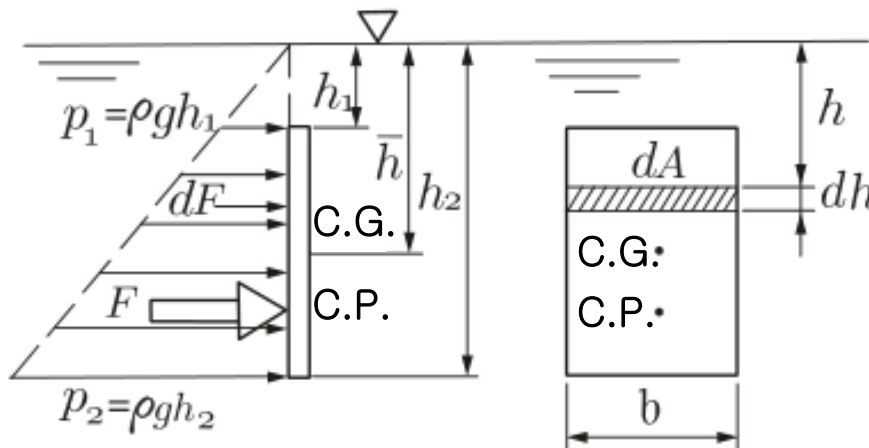
(1) 수직한 면에 작용하는 힘

$$dF = pdA = \gamma y dA$$

$$F = \int_A dF = \int_A pdA = \int_A \gamma y dA$$

$$= \int_{h_1}^{h_2} \gamma y b dy = \gamma b \int_{h_1}^{h_2} y dy = \gamma b \frac{h_2^2 - h_1^2}{2}$$

$$F = P_{avg} A, \quad P_{avg} = \gamma \bar{y}$$



크기 0 방향 0
작용점(C.P.)?



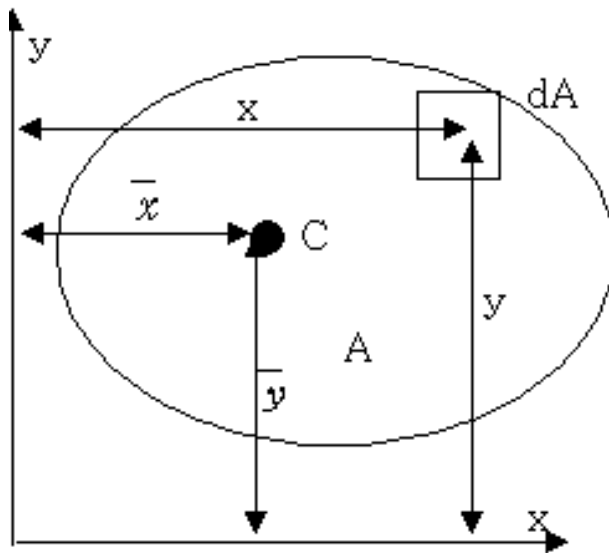
C.G.면중심, C.P. 압력 중심

2-5 보충) 단면 1차 모멘트, 도심

평면도형의 성질

1) 도심과 단면 1차 모멘트

도심(Centroid) : 도형의 전면적이 어떤 점 C에 집중되었다고 할 때 임의의 축에 대한 집중된 면적의 단면 1차 모멘트의 크기가 동일 축에 대한 집중되지 않은 면적의 단면 1차 모멘트가 동일한 점 ~ 무게 중심(C.G)



$$x\text{축에 대한 단면 } A\text{의 1차 모멘트 : } Q_x = \int_A y dA$$

$$y\text{축에 대한 단면 } A\text{의 1차 모멘트 : } Q_y = \int_A x dA$$

$$\text{도심 } C\text{의 단면 1차 모멘트 } Q_x = A\bar{y}$$

$$Q_y = A\bar{x}$$

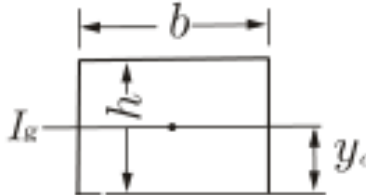
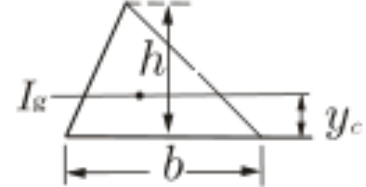
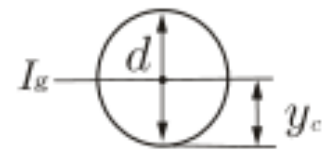
∴ 도심 좌표 \bar{x}, \bar{y} 는

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_A x dA \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y dA$$



2-5 보충) 단면 1차 모멘트, 도심

주요 평면의 도심

도형명	도형	도심의 위치
직사각형		$y_c = \frac{h}{2}$
삼각형		$y_c = \frac{h}{3}$
원		$y_c = \frac{d}{2}$



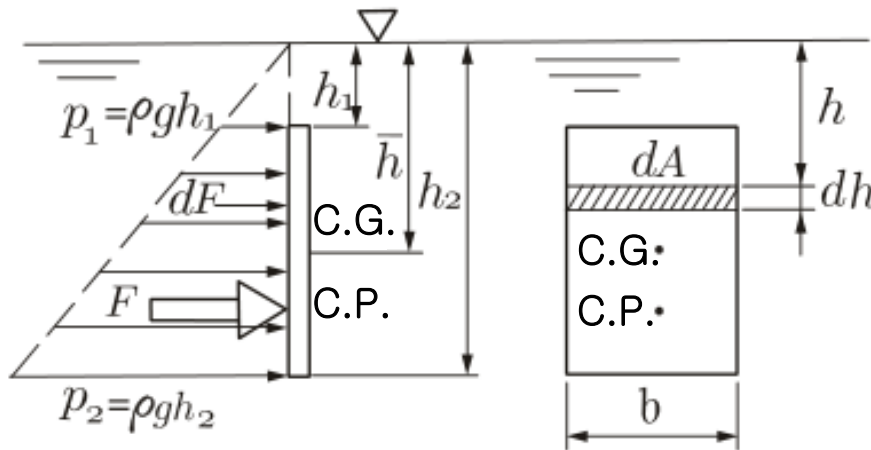
2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

(1) 수직한 면에 작용하는 힘

$$F = \int_A dF = \int_A p dA = \int_A \gamma y dA$$

$$= \int_{h_1}^{h_2} \gamma y b dy = \gamma b \int_{h_1}^{h_2} y dy = \gamma b \frac{h_2^2 - h_1^2}{2}$$

$$F = \gamma \bar{y} A = P_{avg} A, \quad P_{avg} = \gamma \bar{y}, \quad \bar{y} = \frac{\int_A y dA}{A} = h_1 + \frac{(h_2 - h_1)}{2} = \frac{h_1 + h_2}{2}$$



도심 좌표 \bar{x}, \bar{y} 는

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_A x dA \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

$$F = P_{avg} A, \quad P_{avg} = \gamma \bar{y}$$

$$\text{C.G. } \bar{y} = \frac{\int_A y dA}{A}$$

크기 0 방향 0
작용점(C.P.)?



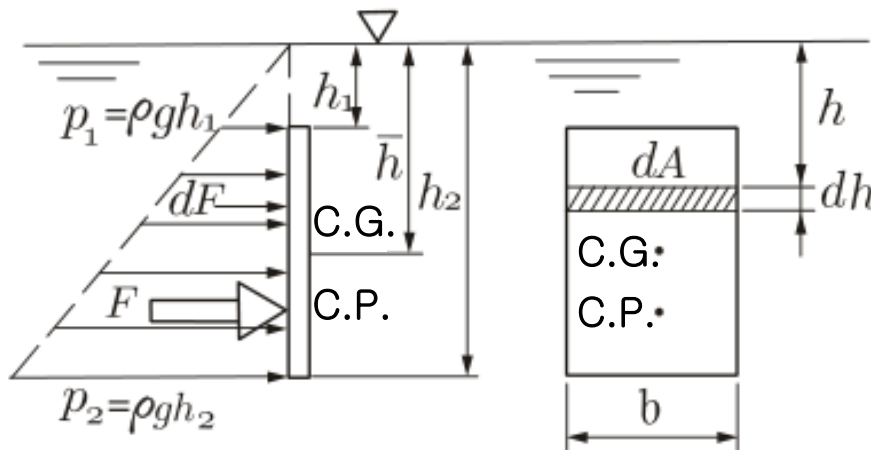
C.G.면중심, C.P. 압력 중심

2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

(1) 수직한 면에 작용하는 힘 : 작용점 구하기

$$M = \int_A y dF = \int_A y p dA = \int_A \gamma y^2 dA$$

$$= y_{C.P.} \times F = y_{C.P.} \times P_{avg} A = y_{C.P.} \times \gamma \bar{y} A$$



C.P.(작용점)

$$y_{C.P.} = \frac{\int_A y^2 dA}{\bar{y} A}$$

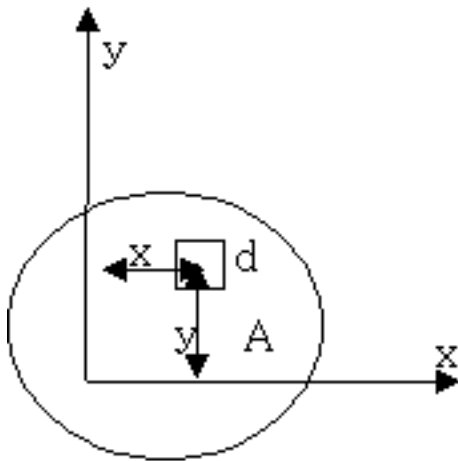
C.G.면중심 , C.P. 압력 중심



2-5 보충) 단면 2차 모멘트

2) 단면 2차 모멘트 또는 관성 능률

임의의 축에 대한 어떤 면적의 단면 2차 모멘트는 미소면적 dA 와 축으로부터 미소 면적까지 거리의 자승을 곱하여 전 면적으로 적분한 값



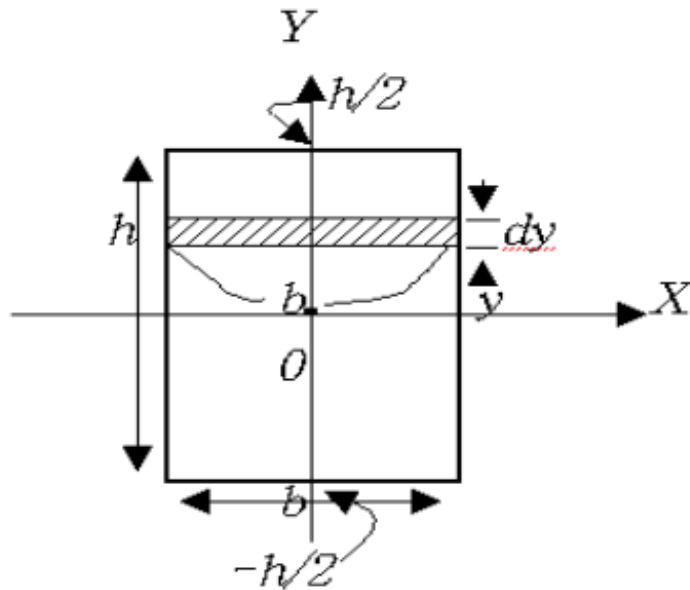
$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

- 단면 2 차 중심 : 도형의 전면적이 어떤 점에 집중되었다고 생각하고 주어진 축에 대한 이 도형의 관성모멘트의 크기가 동일한 축에 대한 분포된 면적의 관성모멘트와 같은 점
- * 단면 2차 반경 또는 회전반경 또는 관성반경 : 단면 2차 중심과 축과의 거리



2-5 보충) 단면 2차 모멘트

ex 4)



도심축 x 에 대한

① 단면 2차모멘트 I_x

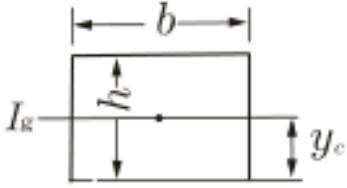
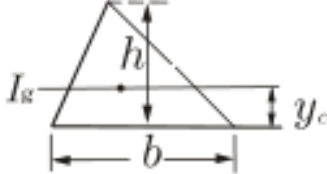
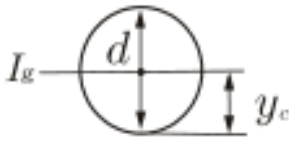
sol>

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad I_x &= \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \, dy = 2b \int_0^{h/2} y^2 dy \\
 &= 2b \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{h/2} = 2b \cdot \frac{h^3}{3 \cdot 8} = \frac{bh^3}{12}
 \end{aligned}$$



2-5 보충) 단면 2차 모멘트

주요 평면의 단면 2차 모멘트

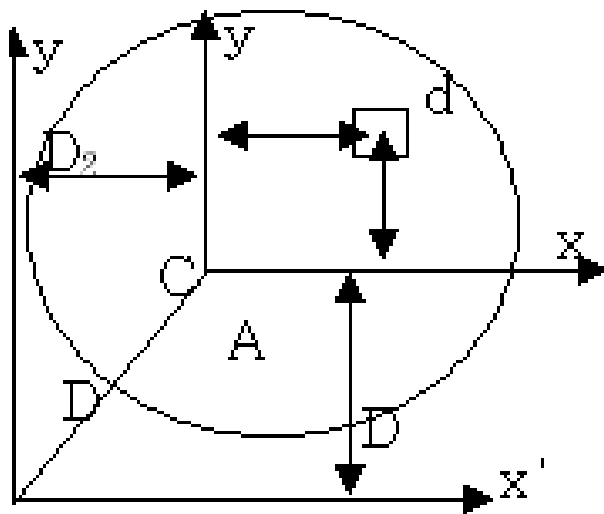
도형명	도형	I 또는 I_g
직사각형		$I_g = \frac{bh^3}{12}$
삼각형		$I_g = \frac{bh^3}{36}$
원		$I_g = \frac{\pi d^4}{64}$



2-5 보충) 단면 2차 모멘트

3) 평행축 정리

임의의 도형의 도심을 지나는 축에 대한 단면 2차 모멘트와 그 축에 평행한 임의의 축에 대한 그 도형의 단면 2차 모멘트와의 관계



$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int_A (y + D_1)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2D_1 \int_A y dA + \int_A D_1^2 dA \\ &= I_x + 2D_1 \int_A y dA + D_1^2 A \\ &= I_x + D_1^2 A \quad \uparrow \quad (\because \int_A y dA = 0) \end{aligned}$$

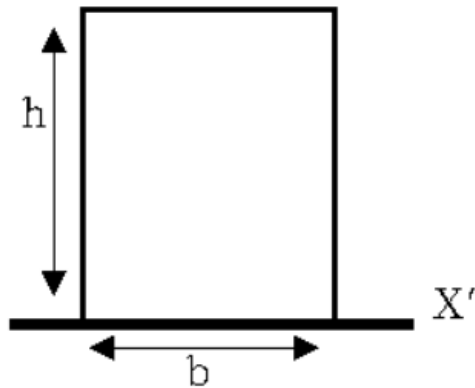
$$I_{y'} = I_y + D_2^2 A$$

※ Varignon 원리 : 합력을 이루는 모멘트는 분력을 이루는 모멘트의 합과 같다.

2-5 보충) 단면 2차 모멘트

ex 5) 다음 단면의 2 차 모우멘트를 구하라.

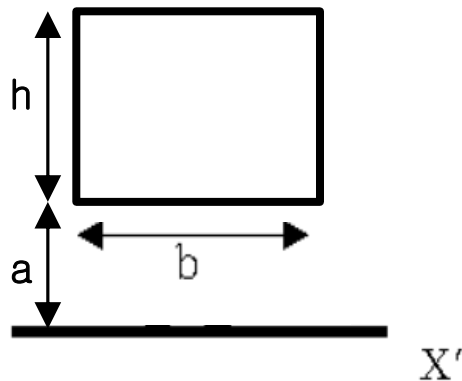
①



Sol>

$$\begin{aligned} I_{X'} &= I_X + D_1^2 A \\ &= \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3} \end{aligned}$$

②



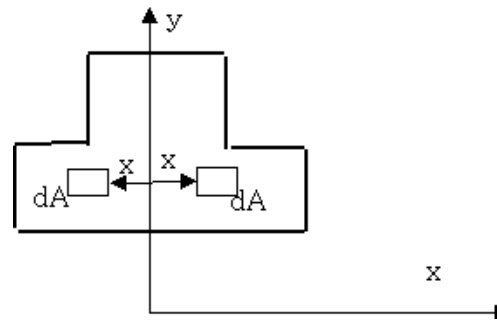
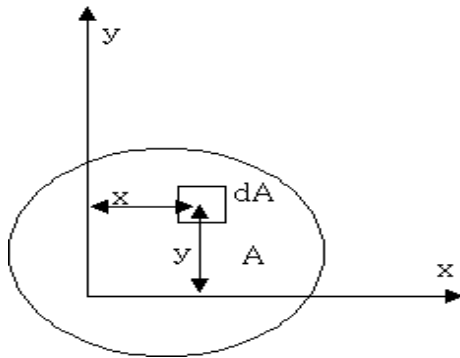
Sol>

$$\begin{aligned} I_{X'} &= I_X + D_1^2 A \\ &= \frac{bh^3}{12} + \left(a + \frac{h}{2}\right)^2 bh = (a^2 + ah)bh + \frac{bh^3}{3} \end{aligned}$$



2-5 보충) 단면 2차 모멘트

4) 평면도형의 관성상승모멘트(Product of inertia) I_{xy}



평면도형내의 미소면적 dA 에 x, y 축까지의 거리 x, y 의 상승적 xy 를 곱하여 전단면 A 에 관해 적분한 값

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad \text{두 축에 어느 축이라도 대칭이면 } I_{xy} = 0 \text{ 이다. 즉}$$

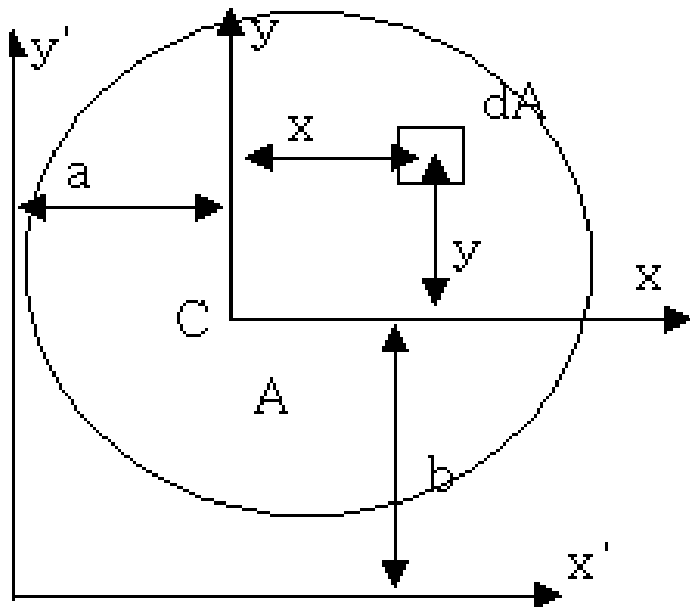
$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^x xy dA + \int_{-x}^0 -xy dA = 0$$

주축(principal axis) : 도형의 도심을 지나고 $I_{xy} = 0$ 이 되는 직교축



2-5 보충) 단면 2차 모멘트

5) 관성 상승 모멘트의 평행축 정리



$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

$$I_{x'y'} = \int_A (x + a)(y + b) dA$$

$$= \int_A xy dA + b \int_A x dA + a \int_A y dA + ab \int_A dA$$

$$\therefore I_{x'y'} = I_{xy} + abA$$



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

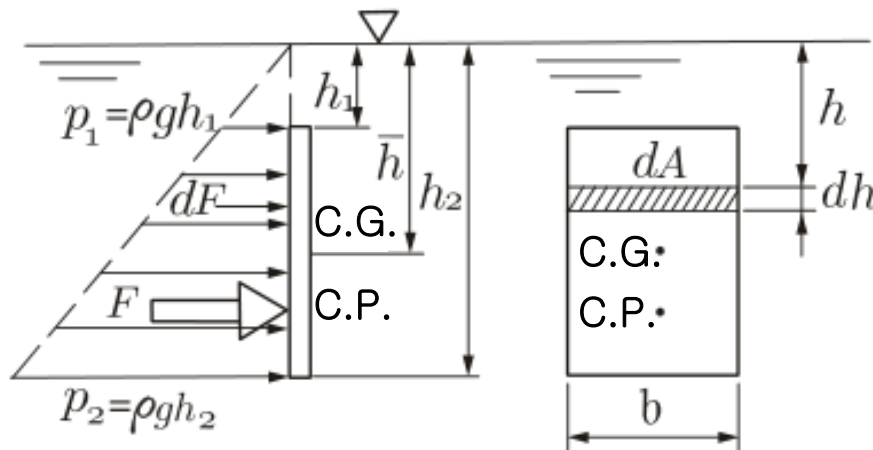
(1) 수직한 면에 작용하는 힘 : 작용점 구하기

$$M = \int_A y dF = \int_A y p dA = \int_A \gamma y^2 dA$$

$$= y_{C.P.} \times F = y_{C.P.} \times P_{avg} A = y_{C.P.} \times \gamma \bar{y} A$$

$$I'_{xx} = \int_A y^2 dA = I_{xx} + (h_1 + \frac{h_2}{2})^2 A$$

$$= I_{xx} + \bar{y}^2 A$$



$$y_{C.P.} = \frac{\int_A y^2 dA}{\bar{y} A}$$

$$y_{C.P.} = \frac{\int_A y^2 dA}{\bar{y} A} = \frac{I_{xx} + \bar{y}^2 A}{\bar{y} A} = \frac{I_{xx}}{\bar{y} A} + \bar{y}$$

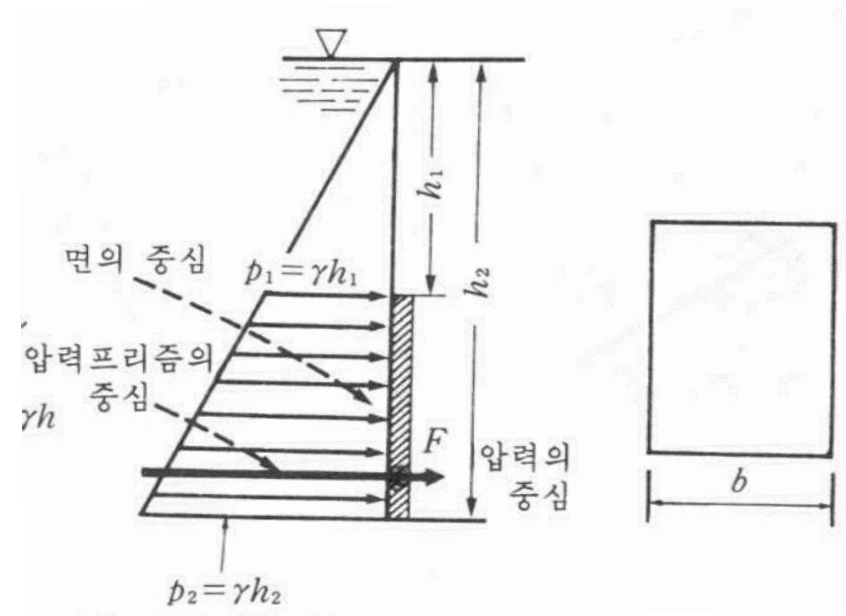
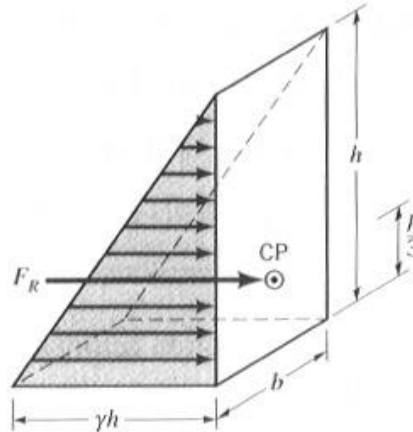
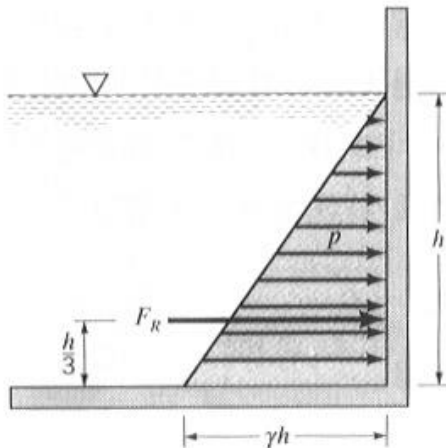
C.G.면중심 , C.P. 압력 중심



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

(1) 수직한 면에 작용하는 힘 : 작용점 구하기

$$y_{C.P.} = \frac{\int_A y^2 dA}{\bar{y}A} = \frac{I_{xx} + \bar{y}^2 A}{\bar{y}A} = \frac{I_{xx}}{\bar{y}A} + \bar{y}$$



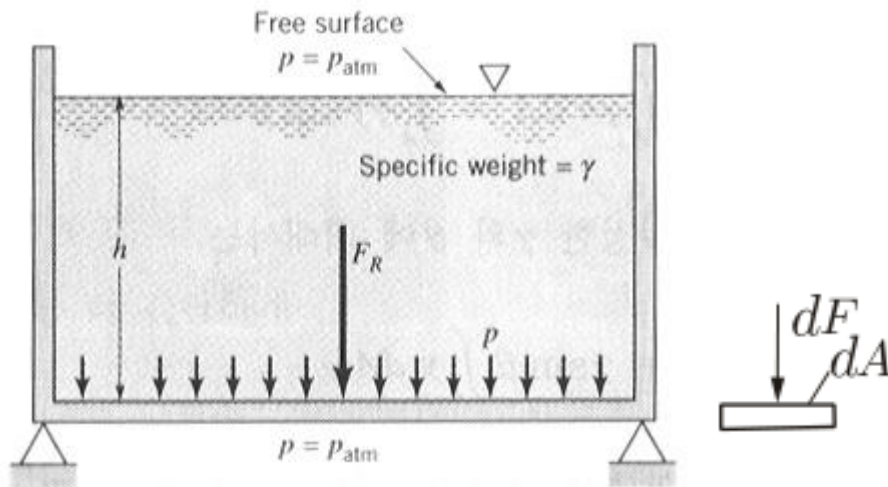
2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

(2) 수평한 면에 작용하는 힘

$$dF = p dA = \gamma y dA$$

$$F = \int_A dF = \int_A p dA = \int_A \gamma y dA = \gamma h A$$

$$\bar{y} = y_{C.P.} = h$$



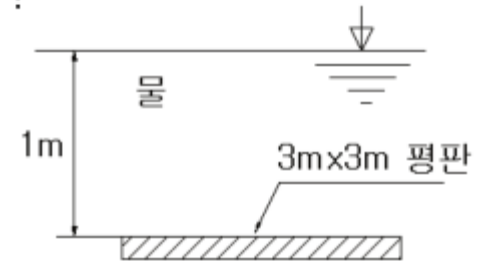
크기 방향 작용점



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

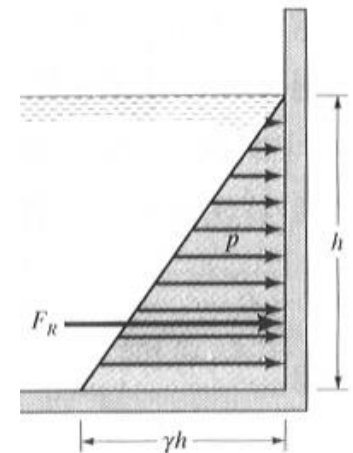
예제.
2-21

그림에서 평판의 한쪽 면에 작용하는 힘은 몇 $[kg_f]$ 인가 ?



예제.
2-22

폭이 2m, 높이가 3m인 평판이 그림과 같이 물에 잠겨있다.
평판에 작용하는 힘의 크기와 작용점을 구하시오.

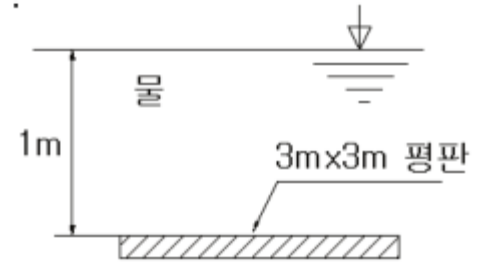


2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

예제.
2-21

그림에서 평판의 한쪽 면에 작용하는 힘은 몇 $[kg_f]$ 인가 ?

$$F = \gamma h A = 1000 \frac{kg_f}{m^3} \times 1m \times 3m \times 3m = 9000kg_f$$



예제.
2-22

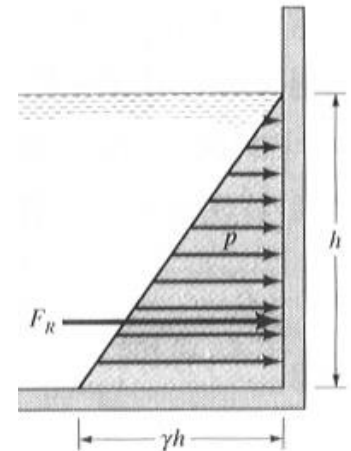
폭이 2m, 높이가 3m인 평판이 그림과 같이 물에 잠겨있다. 평판에 작용하는 힘의 크기와 작용점을 구하시오.

$$F = P_{avg} A = \gamma \bar{y} A = \gamma \frac{h}{2} A = 1000 \frac{kg_f}{m^3} \times \frac{3m}{2} \times 2m \times 3m = 9000kg_f$$

$$M = y_{C.P.} \times F = y_{C.P.} \times \gamma \bar{y} A$$

$$= \int_A y dF = \int_A y p dA = \int_A \gamma y^2 dA = \gamma I'_{xx} = \gamma (I_{xx} + \bar{y}^2 A)$$

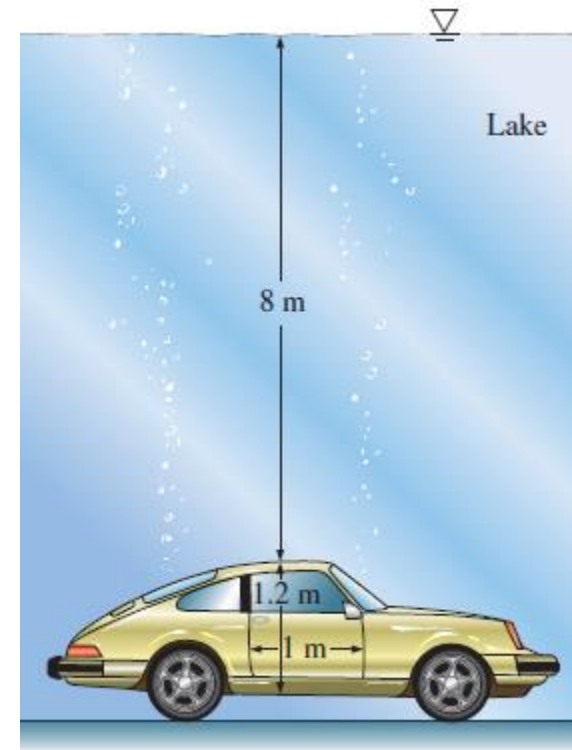
$$y_{C.P.} = \frac{I_{xx} + \bar{y}^2 A}{\bar{y} A} = \frac{I_{xx}}{\bar{y} A} + \bar{y} = \frac{\frac{2m \times (3m)^3}{12}}{(\frac{3m}{2}) \times 2m \times 3m} + \frac{3m}{2} = 2m$$



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

예제.
2-23

그림과 같이 호수 아래에 자동차가 가라앉아 있다. 폭이 1m, 높이가 1.2m인 자동차 문에 작용하는 전압력과 압력 중심을 구하시오.



8m



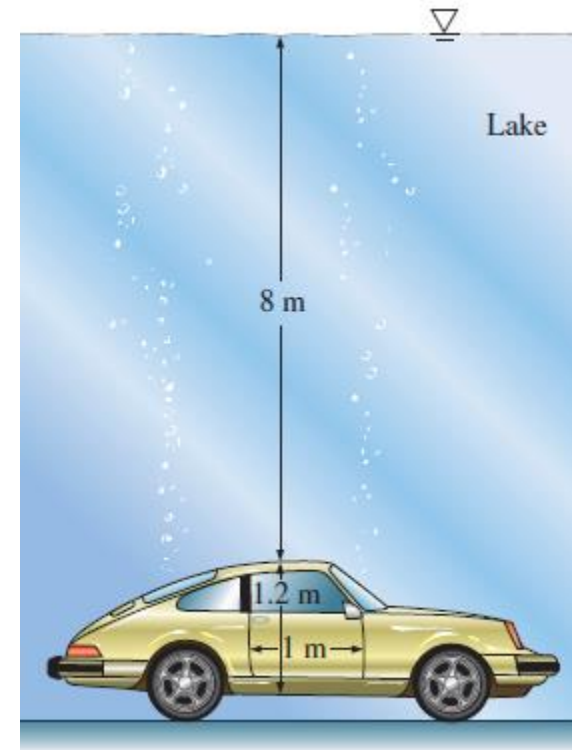
2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

예제. 그림과 같이 호수 아래에 자동차가 가라앉아 있다. 폭이 1m, 높이가 1.2m인 자동차 문에 작용하는 전압력과 압력 중심을 구하시오.

$$\begin{aligned}
 F &= P_{avg}A = \gamma \bar{y}A \\
 &= 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times \left(8\text{m} + \frac{1.2\text{m}}{2} \right) \times 1\text{m} \\
 &\quad \times 1.2\text{m} = 101136 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 101136\text{N}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M &= y_{C.P.} \times F = y_{C.P.} \times \gamma \bar{y}A \\
 &= \int_A y dF = \int_A y p dA = \int_A \gamma y^2 dA = \gamma I'_{xx} = \gamma (I_{xx} + \bar{y}^2 A)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{C.P.} &= \frac{I_{xx} + \bar{y}^2 A}{\bar{y}A} = \frac{I_{xx}}{\bar{y}A} + \bar{y} \\
 &= \frac{\frac{1\text{m} \times (1.2\text{m})^3}{12}}{\left(8\text{m} + \frac{1.2\text{m}}{2} \right) \times 1\text{m} \times 1.2\text{m}} + \left(8\text{m} + \frac{1.2\text{m}}{2} \right) \\
 &= 8.614\text{m}
 \end{aligned}$$



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

예제.
2-24

그림 2·17과 같은 폭 7 m, 높이 10 m인 댐이 있다. 만약 수위가 8 m일 때, 댐에 작용하는 전압력 및 압력중심을 구하라. 단, 물의 밀도는 1000 kg/m^3 이다.

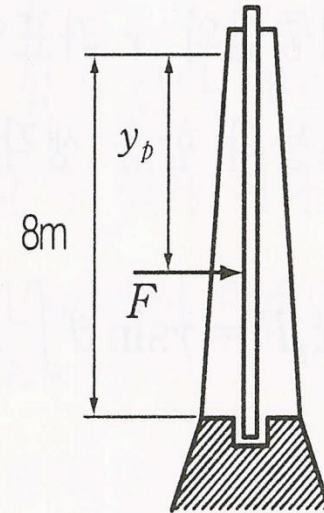


그림 2·17 댐에 작용하는 힘

2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

예제. 2-24

그림 2·17과 같은 폭 7m, 높이 10m인 댐이 있다. 만약 수위가 8m일 때, 댐에 작용하는 전압력 및 압력중심을 구하라. 단, 물의 밀도는 1000 kg/m^3 이다.

풀이

$$\begin{aligned} \text{전압력 } F &= \text{평균압력} \times \text{물의 접촉면적} = \gamma \bar{h} A \\ &= 1000 \times 9.8 \times 4 \times (8 \times 7) = 2195.2 \text{ kN} \end{aligned}$$

압력중심

$$I_G = \frac{bh^3}{12} = \frac{7 \times 8^3}{12} = 298.67 \text{ m}^4$$

$$y_p = \frac{I_G}{yA} + \bar{y} = \frac{298.67}{4 \times (8 \times 7)} + 4 = 5.33 \text{ m}$$

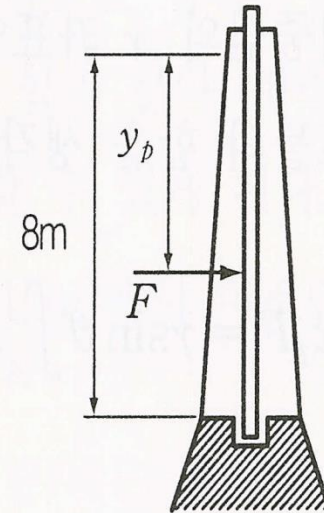


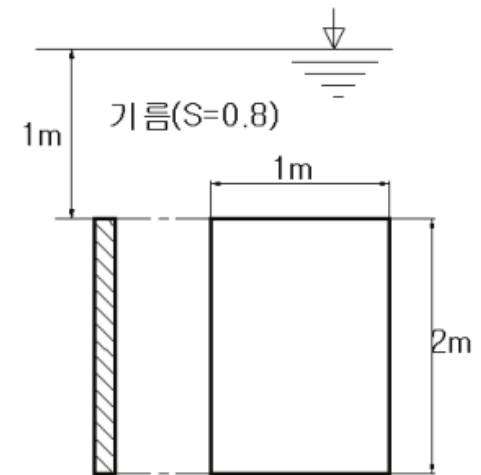
그림 2·17 댐에 작용하는 힘



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

예제.
2-25

그림에서 수직인 평판의 한쪽 면에 작용하는 힘과 작용점을 구하라.



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

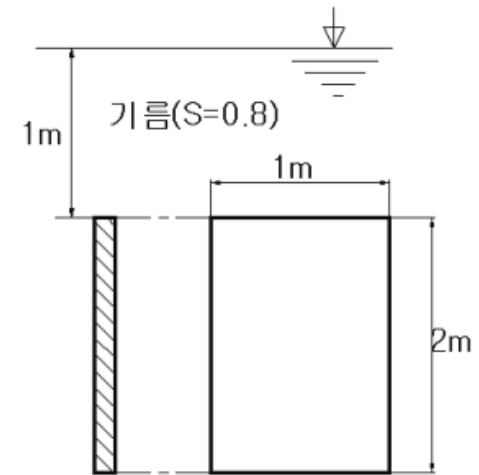
예제.
2-25

그림에서 수직인 평판의 한쪽 면에 작용하는 힘과 작용점을 구하라.

$$\begin{aligned}
 F &= P_{avg}A = \gamma \bar{y}A \\
 &= 0.8 \times 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times \left(1\text{m} + \frac{2\text{m}}{2}\right) \times 1\text{m} \\
 &\quad \times 2\text{m} = 31360 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 31360\text{N}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M &= y_{C.P.} \times F = y_{C.P.} \times \gamma \bar{y}A \\
 &= \int_A y dF = \int_A y p dA = \int_A \gamma y^2 dA = \gamma I'_{xx} = \gamma (I_{xx} + \bar{y}^2 A)
 \end{aligned}$$

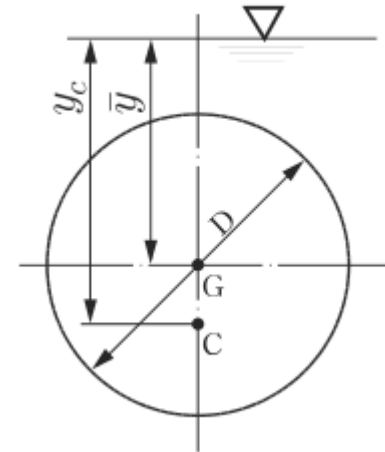
$$y_{C.P.} = \frac{I_{xx} + \bar{y}^2 A}{\bar{y}A} = \frac{I_{xx}}{\bar{y}A} + \bar{y} = \frac{\frac{1\text{m} \times (2\text{m})^3}{12}}{2\text{m} \times 1\text{m} \times 2\text{m}} + 2\text{m} = 2.167\text{m}$$



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

예제.
2-26

그림의 원형 판(직경 $D=4\text{m}$)에서 전압력의 작용점(C점)의 위치 y_c 를 구하라. 단, 원판의 중심이 수심 3m에 위치해있다.



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

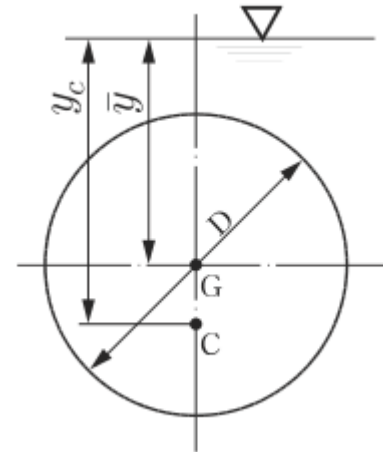
예제.
2-26

그림의 원형 판(직경 $D=4\text{m}$)에서 전압력의 작용점(C점)의 위치 y_c 를 구하라. 단, 원판의 중심이 수심 3m 에 위치해있다.

직경 D 인 원의 $I_g = \frac{\pi D^4}{64}$ 이므로

$$y_c = \bar{y} + \frac{I_g}{\bar{y}A} = \bar{y} + \frac{\pi D^4/64}{\bar{y}\pi D^2/4} = \bar{y} + \frac{D^2}{16\bar{y}}$$

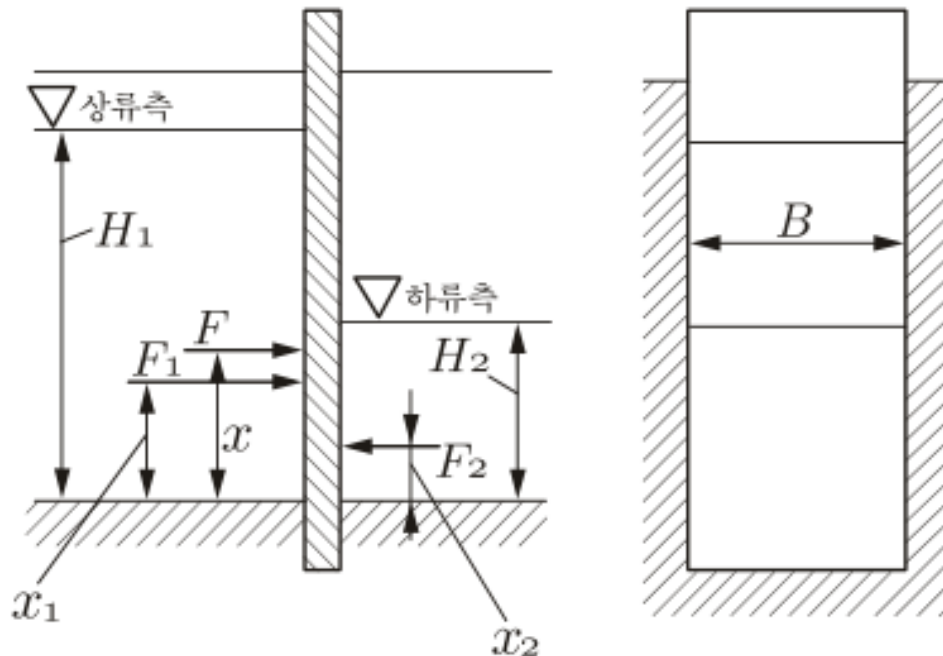
$$= 3\text{m} + \frac{(4\text{m})^2}{16 \times 3\text{m}} = 3.33\text{m}$$



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

예제.
2-27

그림에 표시한 것처럼 폭 $B = 3[\text{m}]$ 의 수로를 수직 수문으로 막았을 때 상류 측의 수심 $H_1 = 4[\text{m}]$, 하류 측의 수심 $H_2 = 2[\text{m}]$ 이었다. 이 때 수문에 작용하는 전압력 F 와, 저면으로부터 그 작용점까지의 높이 x 를 구하라.



2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

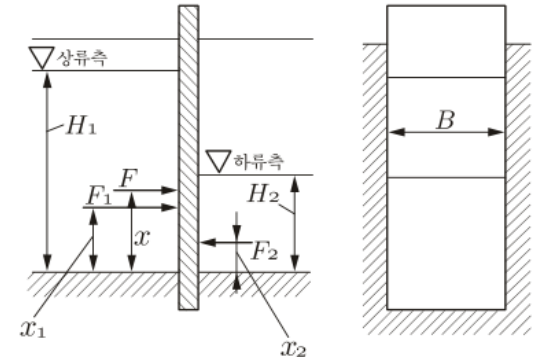
예제. 그림에 표시한 것처럼 폭 $B = 3[m]$ 의 수로를 수직 수문으로 막았을 때 상류 측의 수심 $H_1 = 4[m]$, 하류 측의 수심 $H_2 = 2[m]$ 이었다. 이 때 수문에 작용하는 전압력 F 와, 저면으로부터 그 작용점까지의 높이 x 를 구하라.

[풀이] 상류 측에 작용하는 전압력을 F_1 , 하류 측에 작용하는 전압력을 F_2 라 하면

$$F_1 = \rho g \bar{h}_1 A_1 = \frac{1}{2} \rho g B H_1^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \times 9.8 \times 3 \times 4^2 = 235200 N$$

$$F_2 = \rho g \bar{h}_2 A_2 = \frac{1}{2} \rho g B H_2^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \times 9.8 \times 3 \times 2^2 = 58800 N$$

$$F = F_1 - F_2 = 235200 - 58800 = 176400 N$$



다음에, 합성 전압력 F 의 작용점을 구하기 위해서 수문의 하단점을 중심으로 모멘트의 평형을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$Fx = F_1 x_1 - F_2 x_2,$$

$$\text{여기서 } x_1 = \frac{1}{3} H_1, \quad x_2 = \frac{1}{3} H_2 \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{F_1 \times (1/3) H_1 - F_2 \times (1/3) H_2}{F} = \frac{253200 \times (4/3) - 58800 \times (2/3)}{176400}$$

$$\approx 1.556 [m]$$

2-5 평면에 작용하는 정수력학적 힘

연습과제 (REPORT 08)

- 주요 도형의 도심과 관성 모우멘트를 조사해보자.
- 8차 예제 2-21 ~ 2-25 문제를 풀어서 제출하시오

