행렬과 행렬식

行列과 行列式, Matrix and Determinant

케일리(Arthur Cayley, 1821-1895)

영국의 수학자. 다작의 작가.

그의 업적에 논문 967편이나 포함되어 있다.

리치몬드에서 태어났고, 케임브리지 트리니티 대학에서 공부하고 1842년에 졸업했다. 그 해에 그는 아주 어려운 시험에서 처음으로 스미스상(Smith's prize)을 받을 정도로 우수했다고 한다. 케임브리지 학부 학생 시절에도 논문을 발표하였다. 그렇게 많은 논문 중 매우 특출한 것은 「행렬의 이론에 대한 연구 논문집(Memoir on the Theory of Matrices, 1858)」이다.

수학적인 한 새로운 방법을 창조해낸 것이다.

행렬의 연산, 일차변환 등이 그것이다.

대학 졸업 후 마땅한 일자리를 찾지 못한 케일리는 다시 법학을 전공하여 법조계로 나아가 일했다. 이것은 수학 연구에 필요한 직업으로만 생각하고 있었다고 한다.

법조계에서 일하면서도 수학연구를 게을리하지 않고 수학에 관한 논문을 2백여 편이나 썼다고 한다.

이렇게 수학 연구에 매달린 생활을 하던 중 1863년에 케임브리지의 순수수학 교수가 되었다.

그의 행렬 이론은 당시 굉장한 창조(발명)이었다.

특별히 행렬의 곱에서는 교환법칙이 성립하지 않는다고 주장한 점이다.

즉, 같은 크기의 행렬 A, B에 대하여 $AB \neq BA$인 것이었다.

또 그는 1843년부터 영국의 수학자 실베스터(James Joseph Sylvester, 1814-1897)와 협동으로 연구(invariants에 관하여)하기도 했다.

더욱 혁신적으로 받아들여지는 일은 1854년 추상대수학(abstract algebra)의 군(group)에 대한 그의 업적이다.

또한 기하학(algebraic geometry) 분야에서 $n \geq 3$ 이때 n차원 공간(n-dimensional space)에 대한 연구도 특별한 것이었다.

당시 2차원인 평면에서의 기하학이 주된 흐름이었으므로 획기적이 아닐 수 없었다.

그의 저서 「선형변환에 관하여(On the Theory of Linear, 1845)」를 통하여 케일리가 행렬을 연구한 첫 수학자임을 알 수 있다.

그는 수학 연구 틈틈이 소설 읽기를 즐겼고 등산을 좋아했고 그림도 그렸다고 한다. 그래서 그는 수학자, 법률가, 화가, 등산가라 불리기도 한다.

14.1 행 렬

수 또는 문자들을 직사각형 모양으로 배열하고 괄호로 묶어 놓은 것을 행렬(matrix)이라 한다.

$$(1)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad (3)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

(1), (2), (3)과 같이 행렬을 나타낸다.

괄호 안의 수 또는 문자를 그 행렬의 성분(entry, component)이라 한다. 그리고 동일수평선 위의 성분 전체, 즉 가로 줄을 행(row), 동일수직선 위의 성분 전체, 즉 세로 줄을 열(column)이라 한다. 한 행렬은 보통 (행의 수)×(열의 수) 행렬이라 하는데 (1)은 2×3행렬, (2)는 3×3행렬, (3)은 3×2 행렬이다.

(2)와 같이 행의 수와 열의 수가 같은 행렬을 정사각행렬(square matrix), 한 개의 행으로 된 행렬을 행행렬(row matrix), 한 개의 열로 된 행렬을 열행렬(column matrix)이라 한다.

일반적으로 m, n이 자연수일 때, $m \times n$행렬($m \times n$ matrix)은 m개의 행과 n개의 열로 된 행렬이고 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} \text{1열} & \text{2열} & \text{3열} & & j\text{열} & & n\text{열} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{1행} \\ \text{2행} \\ \text{3행} \\ \vdots \\ i\text{행} \\ \vdots \\ m\text{행} \end{array} & \underbrace{\left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)}_{n\text{개의 행}} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ a \end{array}}\right\} m\text{개의 행}
\end{array}$$

a_{ij}는 i번째행, j번째열에 있는 이 행렬의 성분이다.

$m=n$일 때, 이 행렬을 n차 정사각행렬(또는 정방행렬, square matrix of order n)이라 한다.

- [ ]을 사용하여 행렬을 나타내기도 한다.
  $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdots$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$: 열행렬 (3×1행렬)
- $(-2 \quad 0 \quad 3)$: 행행렬 (1×3행렬)
- 행행렬을 행벡터(row vector) 열행렬을 열벡터(column vector)라고도 한다.
- $m \times n$ matrix는 'm by n matrix' 또는 'm by n 행렬'로 읽는다.
- $a_{\underset{\uparrow}{i}\overset{\downarrow}{j}}$ (열 ↓ j, 행 ↑ i)
- $m \times n$행렬(a_{ij})는 크기(size) $m \times n$을 갖는다고 한다.
- a_{ij}를 행렬(a_{ij})의 제i행, 제j열의 성분(또는 (i, j)성분, ij성분)이라 한다.

• 4×3행렬

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdots 1\text{행} \\ \cdots 2\text{행} \\ \cdots 3\text{행} \\ \cdots 4\text{행} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ 1\text{열} & 2\text{열} & 3\text{열} \end{array} \end{array}$$

행렬의 행은 위에서 아래쪽으로 제1행, 제2행, 제3행, ⋯, 제i행, ⋯, 제n행 또는 1행, 2행, 3행, ⋯, i행, ⋯, n행이라 하고 마찬가지로 열도 왼쪽에서 오른쪽으로 제1열, 제2열, 제3열, ⋯, 제j열, ⋯, 제n열 또는 1열, 2열, 3열, ⋯, j열, ⋯, n열이라 한다.

행렬은 보통 A, B, C, ⋯ 또는 (a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij}), ⋯ 등으로 나타낸다. ($i=1, 2, 3, \cdots, m$이고 $j=1, 2, 3, \cdots, n$) 예를 들면

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

인데 A는 2차 정사각행렬, B는 3차 정사각행렬, C는 2×3행렬이다.

n차 정사각행렬 (a_{ij}), $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

• 주대각성분 a_{ij}은 $i=j$ 일 때

• $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 은 대각행렬이다.

에서 대각선 위의 성분 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$을 주대각성분(principle diagonal entry)이라 한다.

정사각행렬에서 주대각성분을 제외한 모든 성분이 0인 행렬을 대각행렬(diagonal matrix)라 하고 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

즉, $i=j$일 때 $a_{ij} \neq 0$, $i \neq j$일 때 $a_{ij}=0$

모든 성분이 0인 행렬을 영행렬(zero matrix)이라 하고

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

등이다. 영행렬은 문자 O로 나타낸다.