5주차 보충

(1) 힘과 중량(또는 무게와의 관계

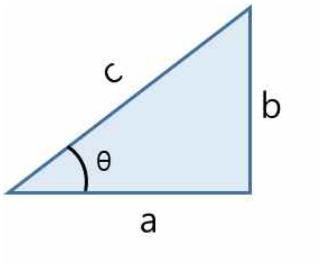
뉴톤의 운동 제2법칙인 $F = ma$에서 가속도,a가 중력가속도,g일 때 힘,F를 중량 또는 무게,W라고 한다.

즉 $W = mg$

$$1kg_f = 1kg \times 9.81\,m/s^2 = 9.81kgm/s^2 = 9.81N$$

(2) 삼각함수

$$\sin\theta = \frac{b}{c}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{c}$$
$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

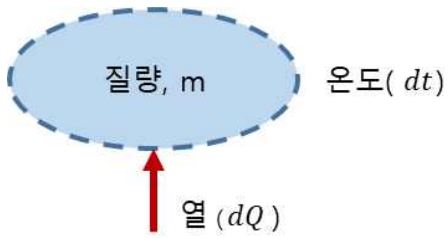


1-11 열량과 비열 및 혼합온도

(1) 열량(quantity of heat)과 비열

질량 $m\,kg$ 의 물체에 열량 dQ 를 가하면 온도변화를 dt라 하면 dt는 dQ에 비례하고 m에 반비례한다는 것을 경험으로 알고 있다.

$$dt \propto \frac{dQ}{m}$$
$$dQ \propto mdt$$
$$dQ = cm\,dt \quad [kJ]$$
$$dQ = mc\ dt \quad [kJ] \qquad (1\text{-}14)$$



이를 비열방정식이라고 한다.

공학단위계는 다음과 같다.

$$dt \propto \frac{dQ}{G}$$
$$dQ \propto G\ dt$$
$$dQ = Gc\,dt \quad [kcal]$$

여기서 비례상수 c를 물질의 성질에 따른 고유상수로서 비열(Specific heat) 이라 한다. 비열은 어떤 물질 1kg을 1℃ 높이는데 필요한 열량이다.

$$c = \frac{dQ}{mdt} \quad [J/kgK] \qquad\qquad c = \frac{dQ}{Gdt} \quad [kcal/kg_f℃] \qquad (1\text{-}15)$$

(cf) 열용량(heat capacity) : c'

질량 m의 물질을 온도 1℃높이는데 필요한 열량.

$$c' = mc \ [kJ/K] \qquad (1\text{-}16)$$

만일 비열c가 온도와 관계없이 일정할 경우 물체의 온도를 t_1에서 t_2로 올리는데 필요한 열량은

$$_1Q_2 = mc(t_2 - t_1) \quad [kJ] \qquad (1\text{-}17)$$

① 온도와의 관계

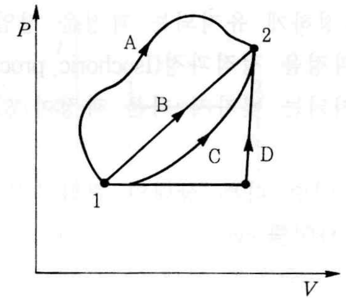
ⓐ $c \neq f(t)$: 비열이 온도와 관계없이 일정한 경우

$$\int_1^2 dQ = \int_1^2 mcdt = mc\int_1^2 dt$$

$$_1Q_2 = mc(t_2 - t_1) \quad [kJ] \qquad (1-18)$$

$$_1q_2 = c(t_2 - t_1) \quad [kJ/kg]$$

◎ 점함수와 경로함수



·점함수(Point function) : 양단의 상태만의 함수로써 완전미분형태의 함수.

$$\int_1^2 dV = V_2 - V_1$$

·경로[과정, 과도]함수(path function) : 양단의 상태뿐만 아니라 경로에도 관계되는 함수로써 불완전 미분형태의 함수.

$$\int_1^2 \delta Q = {}_1Q_2 = Q_{1\to 2} \qquad \int_1^2 \delta Q \neq Q_2 - Q_1$$

$$\int_1^2 \delta W = {}_1W_2 = W_{1\to 2}$$

열역학에서는 열과 일밖에 없다. 따라서 열과 일의 미소변화량은 수학적으로 δQ, δW로 표기하여야 하지만 편의상 dQ, dW로 표기하기로 한다.

ⓑ $c = f(t)$: 비열이 온도의 함수 즉 온도에 따라 변화하는 경우

$$\int_1^2 dQ = \int_1^2 mcdt = m\int_1^2 cdt = m\int_1^2 f(t)dt$$

$$_1Q_2 = m\frac{\int_1^2 c\,dt}{(t_2 - t_1)}(t_2 - t_1) = m\,c_m(t_2 - t_1) \quad [kJ]$$

$$_1q_2 = \frac{\int_1^2 c\,dt}{(t_2 - t_1)}(t_2 - t_1) = c_m(t_2 - t_1) \quad [kJ/kg] \qquad (1-19)$$

여기서 C_m은 t_1과 t_2사이의 평균비열.

$$c_m = \frac{\int_1^2 cdt}{(t_2 - t_1)} \qquad (1-20)$$

$$_1q_2 = c_m(t_2 - t_1) \quad [kJ/kg]$$

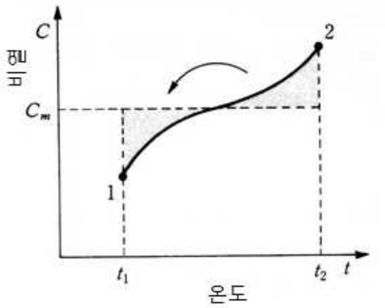


그림 1-5 평균비열

② 열적관계

비열은 열적조건과 열적 상태에 따라 다르며 다음과 같이 구분한다.

ⓐ 정압비열(c_p) : 압력이 일정한 상태에서의 비열.

ⓑ 정적비열(c_v) : 체적이 일정한 상태에서의 비열.

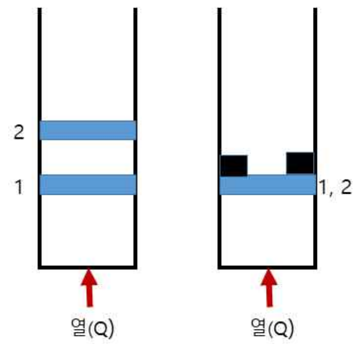
◎ 비열비(ratio of specific heat) : k

정압비열과 정적비열의 비.

$$k = \frac{c_p}{c_v} \qquad (1\text{-}21)$$

기체 : $c_p > c_v$, $\quad k > 1$

액체, 고체 : $c_p \fallingdotseq c_v$, $\quad k \fallingdotseq 1$



(a) 정압변화 (b) 정적변화

(2) 단위

SI단위 : J(Joule)

공학단위 : kcal, Btu, Chu

① 1 kcal : 표준 대기압상태에서 순수한 물 $1kg_f$를 1℃ 높이는데 필요한 열량.

ⓐ 15℃kcal [$kcal_{15}$]

1 $kcal_{15}$: 표준 대기압하에서 순수한 물 $1kg_f$를 14.5℃에서 15.5℃까지 높이는데 필요한 열량.

ⓑ 평균kcal [$kcal_m$]

1 $kcal_m$: 표준 대기압하에서 순수한 물 $1kg_f$를 0℃에서 100℃까지 높이는데 필요한 열량의 1/100.

ⓒ 국제 kcal [$kcal_{int}$]

1 $kcal_{15}$ = 4186.5 J

1 $kcal_m$ = 4186.05 J

1 $kcal_{int}$ = 4186.8 J

1 $kcal$ = 427 $kg_f m$ = 4.2 kJ

↑427 ×9.81 m/s^2

② 1 Btu(British Thermal Unit) : 표준 대기압하에서 순수한 물 $1lb_f$를 1°F 높이는데 필요한 열량.

1 Btu = 0.252 kcal

③ 1 Chu(Centigrate Heat Unit) : 표준 대기압하에서 순수한 물 $1lb_f$를 1℃ 높이는데 필요한 열량.

1 Chu = 9/5 Btu

(3) 혼합후의 온도

	질량	비열	온도	혼합후의 온도
물질(1)	m_1	c_1	t_1	t_m
물질(2)	m_2	c_2	t_2	t_m

가정 : 화학반응 또는 외부로의 열손실이 없다.

$t_1 < t_2$ 라 하면 $\quad t_1 < t_m < t_2$

열평형에 의해 $Q_1 = -Q_2$(-는 방열)이므로 $Q_1 + Q_2 = 0$

$$m_1 c_1 (t_m - t_1) + m_2 c_2 (t_m - t_2) = 0$$

$$\therefore t_m = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

◎ n종의 물질을 혼합한 후의 온도 : t_m

$$t_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i} \qquad (1-22)$$

cf) 외부로의 열손실 Q_l이 있는 경우

$$t_m = \frac{(\sum_{i=1}^{n} m_i c_i t_i) - Q_l}{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i}$$

[예제1-4] 6 kg의 강제 그릇에 25℃의 물 22ℓ가 들어있다. 여기에 200℃의 구리 5 kg를 넣었다면 열평형 후의 온도는 ? 단, 물의 비열은 4.187 kJ/kgK, 강의 비열은 0.4648 kJ/kgK 이고 구리의 비열은 0.386 kJ/kgK 이다.

(1) 외부로의 열손실이 없는 경우

(2) 외부로의 열손실이 20 kJ인 경우

(sol) 1m^3 = 10^{3}ℓ= 10^{6}mℓ 이므로 1ℓ = 10 $^{-3}$ m^3

질량 $\rho = \frac{질량}{체적} = \frac{m}{V}$ 에서 물의 밀도 $\rho = 1000 kg/m^3$이므로 물의 질량 m_w

$m_w = \rho V$ = 1000 × 22×10^{-3} = 22 kg

$$t_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i}$$

$$= \frac{(6 \times 0.4648 \times 25 + 22 \times 4.187 \times 25 + 5 \times 0.386 \times 200)}{(6 \times 0.4648 + 22 \times 4.187 + 5 \times 0.386)}$$

$$= 28.49℃$$

(2) $t_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i c_i t_i - Q_l}{m_i c_i}$

$$= \frac{(6 \times 0.4648 \times 25 + 22 \times 4.187 \times 25 + 5 \times 0.386 \times 200) - 20}{(6 \times 0.4648 + 22 \times 4.187 + 5 \times 0.386)}$$

$$= 28.28℃$$

1-11 일 및 에너지

(1) 일(Work):W

물체에 작용하는 힘(F)와 힘이 작용하는 방향으로의 변위(l)와의 곱.

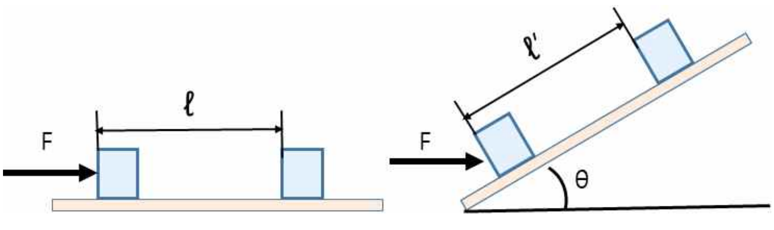


그림 1-6 일

$$\underline{W = F\,l = F l' \cos\theta} \qquad (1-23)$$

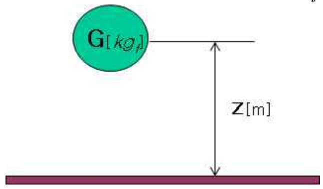
$$\uparrow l = l' \cos\theta$$

(3) 기계적에너지 또는 역학적에너지(Mechanical energy) : E

물체의 위치 또는 운동에 의해 발생되는 에너지

① 위치 에너지(potential energy) : E_P

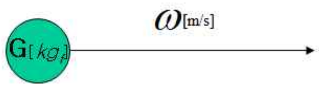
$$E_P = Gz \qquad [kg_f m]$$



$$E_P = mgz \quad [kg\ m^2/s^2] = [Nm] \qquad (1\text{-}24)$$

$$e_P = \frac{E_P}{G} = z\ [\mathrm{m}] \qquad (1\text{-}25)$$

② 운동 에너지(kinetic energy) : E_K



$$E_K = \frac{G}{2g}\omega^2 \quad [kg_f \mathrm{m}]$$

$$E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 \quad [kg\ m^2/s^2] = [Nm] \qquad (1\text{-}26)$$

$$e_K = \frac{E_K}{G} = \frac{\omega^2}{2g} \quad [\mathrm{m}] \qquad (1\text{-}27)$$

(4) 열에너지 : Q

분자의 운동에 의해 발생되는 에너지

$$dQ = m\,c\,dt \qquad (1\text{-}28)$$

(5) 기타 : 전기 에너지, 빛 에너지, 소리 에너지.

1-12 동력(Power) 또는 일률. 공률 : $\dot{W}$

단위 시간당 한 일량

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} \qquad (1\text{-}29)$$

[단위]

$$1W = 1J/s = 1Nm/s = 1kgm^2/s^3$$

$$1kW = 102\,kg_f m/s = 860\,kcal/h$$

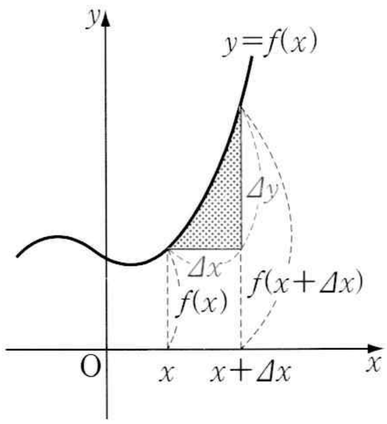
$$1kg_f m/s = 9.81N/s = 9.81W$$

$$1hp(horsepower, \text{영마력}) = 76\ kg_f m/s = 0.746\,kW = 550\,lb_f ft/s = 641.6\,kcal/h$$

$$1PS(pferdestarke, \text{불마력}) = 75\ kg_f m/s = 0.7355\ kW = 542.5\,lb_f ft/s = 632\,kcal/h$$

1. 미분

함수 $y=f(x)$ 즉, y는 x의 함수(function)에서



$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(\Delta x)}{\Delta x}$$

를 x에 관한 y의 도함수라 하며,
도함수를 구하는 것을 함수$f(x)$를 x에 관하여 미분한다라고 한다.

-기호 : $y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$

여기서$f'(x)$는 "f 프라임(prime) x"라고 읽는다.

-의미 : x인 점에서의 접선의 기울기

-응용: 접선의 기울기, 극대, 극소, 속도와 가속도, 시간에 대한 길이 또는 부피의 변화율

-미분법

함수		도함수(미분)
상수	$y=c$	$y'=0$
거듭제곱	$y=kx^n$	$y'=nkx^{n-1}$
로그	$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}\ (x>0)$
지수	$y=e^x$	$y'=e^x$

예)$y=3x^4-5x^3+2x^2-7$

$y'=12x^3-15x^2+4x$

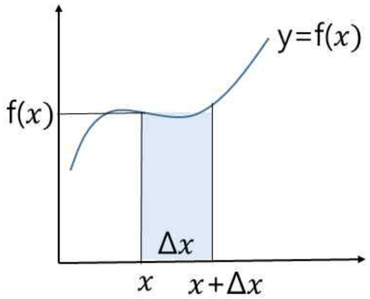
2. 적분

적분은 뉴턴(1643~1727)과 라이프니츠(1646~1716)의해 정립되고 $\int$ 기호는 라이프니치에 의해 창안되었고 적분 또는 인테그랄(integral)이라고 읽는다.

1)부정적분

미분하여 함수 $f(x)$가 되는 함수 $F(x)$를 부정적분이라 하며, $F(x)$를 구하는 것을 적분이라 한다.

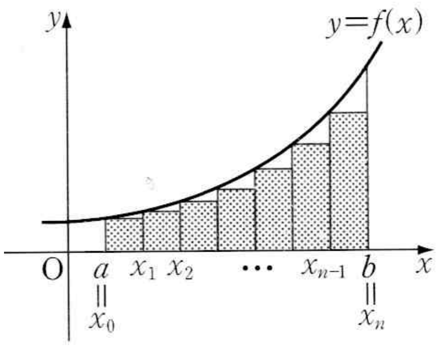
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$ (단, C는 적분상수)



함수		적분
상수	$y = k$	$\int kdx = kx + C$
거듭제곱	$y = x^n$	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
역수	$y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$
지수	$y = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$

2) 정적분

부정적분을 활용한 일정구간을 적분하는 방법을 정적분이라 하며, 어떤 도형의 면적이나 부피를 구할 때 사용한다.



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

a(아래끝)에서 b(위끝)까지 적분한다 라고 한다.

-의미: 곡선$f(x)$와 a와 b로 둘러쌓인 도형의 넓이

-응용 ; 넓이, 부피, 속도와 거리

-계산법

$\int f(x)dx = F(x) + C$ 일때

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)dx]_a^b = F(b) - F(a)$$

예) $\int_1^3 (6x^2 - 4x + 3)dx$

$== [\frac{6}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 + 3x]_1^3$

$= (2\cdot3^3 - 2\cdot3^2 + 3\cdot3) - (2\cdot1^3 - 2\cdot1^2 + 3\cdot1) = 42$